Teoria miary
WPPT IIr. semestr letni 2008
EGZAMIN POPRAWKOWY

25 czerwca 2008

Zadanie 1. (8p.) Wykaż, że singularność miar nieujemnych skończonych daje się wyrazić przy pomocy absolutnej ciągłości, następująco:

$$\mu \perp \nu \iff \forall_\xi \; [(\xi \ll \mu \wedge \xi \ll \nu) \implies \xi \equiv 0].$$

ROZW.: Jeśli $\mu \perp \nu$ i D jest taki, że $\mu(D) = \nu(D^c) = 0$ i $\xi \ll \mu$, to $\xi(D) = 0$ co daje $\xi \perp \nu$. Jeśli teraz $\xi \ll \nu$, to $\xi \equiv 0$ (tylko miara zerowa jest jednocześnie singularna i absolutnie ciągła względem innej miary). No odwrót: Załóżmy, że $\nu \not\perp \mu$. Rozłóżmy $\nu = \nu_1 + \nu_2$ tak, że $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$. Jeśli $\nu_1 \equiv 0$, to $\nu = \nu_2 \perp \mu$, a tak nie jest. Czyli $\nu_1 \not\equiv 0$, $\nu_1 \ll \mu$ i oczywiście $\nu_1 \ll \nu$. Czyli kładziemy $\xi = \nu_1$ i mamy zaprzeczenie warunku z zadania.

Zadanie 2. (9p.) Dla miary znakowanej μ udowdnij, że dla zbioru mierzalnego A,

$$|\mu|(A) = 0 \iff \forall_{B \subset A} \; \mu(B) = 0.$$

ROZW.: Jeśli $|\mu|(A) = 0$ to z nieujemności miary $|\mu|$ mamy $\forall_{B \subset A} \; |\mu|(B) = 0$. Ponieważ $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$, otrzymujemy $\forall_{B \subset A} \; \mu(B) = 0$. Teraz na odwrót: Jeśli $|\mu|(A) > 0$ to $\mu^+(A) > 0$ lub $\mu^-(A) > 0$ (lub obie te nierówności). Niech na przykład $\mu^-(A) > 0$. Wiemy, że $\mu^+ \perp \mu^-$. Niech D spełnia $\mu^+(D) = \mu^-(D^c) = 0$ i niech $B = A \cap D$. Oczywiście $B \subset A$ oraz $\mu(B) = \mu^+(B) - \mu^-(B)$. Pierwszy wyraz jest równy zero, natomiast drugi (ze zmienionym znakiem) obliczymy następująco:

$$\mu^-(B) = \mu^-(A \setminus D^c) = \mu^-(A) - \mu^-(D^c \cap A) = \mu^-(A) > 0.$$

Czyli $\mu(B) \neq 0$, doszliśmy do zaprzeczenia drugiego warunku z zadania.

Zadanie 3. (8p.) *Normą* miary skończonej znakowanej μ jest wartość $\|\mu\| = |\mu|(X)$ (nie mylić z $|\mu(X)|$!). Udowodnij, że jeśli ciąg miar nieujemnych skończonych μ_n zbiega do miary μ w tej normie, to dla każdego zbioru mierzalnego A zachodzi zbieżność $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

ROZW.: $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n - \mu|(A) \leq |\mu_n - \mu|(X) = \|\mu_n - \mu\| \to 0.$

Zadanie 4. (8p.) Niech μ i ν będą miarami nieujemnymi skończonymi na $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$, odpowiednio. Udowdnij, że dla $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, $(\mu \times \nu)(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu(A_x) = 0$ dla μ-prawie każdego x (przypominijmy, że $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$).

ROZW.: Z Twierdzenia Fubiniego dla zbiorów mamy $0 = (\mu\times\nu)(A) = \int \nu(A_x)\,d\mu(x)$. Zatem funkcja $x \mapsto \nu(A_x)$ ma całkę zero miarą nieujemną μ. Ponieważ jest to funkcja nieujemna (bo ν jest miarą nieujemną), to jest to funkcja równa zero μ-prawie wszędzie.

Zadanie 5. (9p.) Niech X będzie zbiorem przeliczalnym, a $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów X. Udowodnij, że każda miara μ na $(X, \mathcal{F})$ jest absolutnie ciągła względem miary liczącej i podaj wzór na jej gęstość.

ROZW.: Tylko zbiór pusty ma miarę liczącą zero. Każda miara spełnia $\mu(\emptyset) = 0$, więc jest absolutnie ciągła względem miary liczącej. Gęstością jest $f(x) = \mu(\{x\})$, bo $\int_A f(x)\,d\# = \sum_{x\in A} f(x) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) = \mu(A)$ (bo suma jest przeliczalna).

Tomasz Downarowicz